大阪大学数学ⅠAⅡB＋C（ベクトル）を受講する皆さんへ

このテキストを手にしている皆さんは，志高くここまで勉強を進めてきたと思います。その努力を，**大阪大学に通用する力に仕上げるために必要なこと**とは？　・・・それをお話しする前に，まずは皆さんは**「細やかな技術」**がきちんと身についていますか？ とくに高２までに数学の各分野のさまざまな問題を通じ，皆さんはさまざまな技術を磨いてきたはずです。もし不足している部分・分野が自覚された時には，速やかに技術を再び磨いておいてください。

さて，数学においてはよく「応用力がない」という声を耳にします。それはいわゆる「公式暗記型」でしか数学を勉強していない人によく見られる気がします。「２次方程式が異なる２つの実数解をもつ」 ⇒ 「判別式 $D>0$」といったように。数学で大切なのは「⇒」，いわゆる「プロセス」の部分です。そこに至る「背景」「理由」ですね。それを理解した上で「⇒」をショートカットする分にはまったくかまいませんが。皆さんはちゃんとそれを自覚してきましたか？

そして，「応用力」とはまさに**「プロセス力」**と言えましょう。問題を見たとき，その問題が語っていることをその字面の奥に潜む部分まで読み込み，どこに自分の手で解決しなければならない「壁」があるのかを考えるわけです。さらに壁を越えるために何が必要か。その「鍵」がこの「⇒」に隠されています。そうです，それを選択すべき「理由」があるのです。はたまた，時には形の美しさといった，数学の枠を越えた部分にヒントが隠されていることもあるでしょう。それを見抜き，立式し，磨いた技術をもって計算し答案として仕上げていくのです。

このテキストは，この**「プロセス力」を養うために必要な問題が厳選**されています。後述しますが，このテキストの使い方に従い，画面を通じて伝わってくるものを目で，耳で，肌で吸収し，自分のものとするための**復習を実践**すれば（ここ大事！），無限に広がる数学の世界の扉は確実に開かれます。今日の授業から何が皆さんに伝わってきたのか。それを反芻し，他の異なる場面においても**「考える」癖をつける**。それこそが, 大阪大学に通用する力となるでしょう。

そうです。**「この講座だけをやればいい」のではありません**。「傾向と対策」というものは，大学入試には存在しません。「たまたま」出ることが多かった分野に絞って勉強することのリスクが高すぎるからです。扉を開いた後は，自ら歩んでいくことです。そのために必要な問題集もご紹介いたします。扉が開かれているのにその先に進まない人はいないでしょう。なぜならば，その先にあなた方が目指す「大阪大学」があるのですから。

この講座を見るたびに，さまざまな「開かずの扉」が音を立てて開くでしょう。決してテクニカルなことは要求しません。必要なのは，磨いてきたはずの**技術**，そしてその技術を活かすべくこの講座をとらえる**謙虚な姿勢**，そして受かりたいという**気持ち**です。その気持ちで授業を聞き，もし感動することがあっても，感動したという事実だけでその日を終わらないでください。せっかく開きかけた扉も，時間がたてば自動的に閉まりますよ。**真に感動すべきは，自分で「未知なる道」を切り開いた時**です。その感動をかみしめながら，一歩，また一歩，大阪大学を目指して前進しましょう。何かを見失ったとき，忘れた時、私は，指南役としていつもあなたのそばに現れます。

山内　恵介

＜大阪大学数学ⅠAⅡB+C(ベクトル)　目次＞

第１講　方程式・不等式
第２講　図形と方程式
第３講　微分法・積分法①
第４講　微分法・積分法②
第５講　ベクトル
第６講　数列
第７講　場合の数・確率
第８講　整数問題
第９講　総合問題⑴
第 10 講　総合問題⑵

＜講座の受講の仕方＞

①　予習について

すべての講は「講義問題」３問で形成されています。まずは何も見ないで問題をノートまたはルーズリーフに解いてみましょう。自分が問題をとらえる力がどこまで養われているかわかります。

ここでは必ずしも答案形式にこだわる必要はありません。掲載されている問題はすべて実際に大阪大学の入試に出題されたものですから，最後まで解けないことも多いかもしれません。それでも，いろいろな可能性を追ってみましょう。

ちなみに１問にかけてよい時間はおよそ 20 分です。もちろん，このまま続ければ(おそらく)最後の答に行き着く！　というところまで行っている場合は，30 分まではかけて結構です。３問でおよそ１時間から１時間半。数学に本気で向き合う時間です。

②　講義について

予習をすることで自分の見るべきポイントが押さえられた状態，これが講義を受ける前に必要な準備です。それができている状態で授業を見て，先生がこの問題を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください。問題が掲載されているページはすべて見開きの構成となっており，余白（「Note」欄）がふんだんに用意されています。ここには何でも「自由」に書いて残すことができます。「自由」とはどういうことか。 それは，このスペースに画面上の黒板に書かれたことを「書き写すのみ」に留まることは厳禁，ということです。授業時間は限られています

から，先生は全てを黒板に書くことはしていません。よって，授業を聞き，先生が話したことや自分なりに感じ取ったことを記しておくべきなのです。きれいにまとめても誰も見てくれませんよ。あくまで「Note」＝「記録」です。後から見て自分だけがわかる程度でいいのです。

ちなみにここまでの人生で書く速度を速くする努力をしてこなかった人へ。この講座はいつでも止めたり戻ったりできます。もちろん，聞きながら書くという訓練はこれからでも遅くありません。ちなみに止められるからといって「考えすぎ」は逆に厳禁です。あなた方に残された時間は限られています。勉強は数学だけじゃないでしょう？ 大枠をとらえた上で，細かいところに後からこだわる姿勢も大事です。もちろんそれでも「今日はこれを解決しないと眠れない！」という人…。明日は寝不足で学校に行くことになるかもしれませんが，先生がとことんお付き合いしますよ。そんな日も時にはあっていいのかもしれませんね。

ちなみに各講義を通じ，この問題から得られることを「Point Pickup」と題して簡潔にお伝えいたします。これもテキストに残しておきましょう。

③　復習について　その１

まずは問題によって語られた「ストーリー」を，テキストの問題やPoint Pickupを見ながらもう一度頭に描いてみましょう。もし思い出せない場面があったらノートを見てみましょう。そしてそこで描いた世界観を元に，次に自分で実際に問題を解いてみましょう。予習と異なり，ここでは計算も含め実際に丁寧に記述していきましょう。もし全然歯がたたない場合は，もう一度講座を視聴することをお勧めします。

もちろん数学という科目の特性上，あなたの技術力の不足などで途中で止まってしまうかもしれません。また，あなたの想いをどう記述で表現していいかわからない場合もあるかもしれません。安心してください。すべての問題に「模範解答」がついています。必要に応じ，画面を見る，またはプリントアウトして参考にしてください。

講義問題の復習をこのように欠かすことなく行い，解答を自分で書き上げることができた時が，先生から得たものが自分のものになった瞬間です。こうして書き上げた答案を，テキストと一緒に保存しておきましょう。

また１回の復習で納得のいくものが書けないケースもあるかと思います。そういった場合は，時間をおいて今一度問題を解き直すことをお勧めします。チャンスは「空き時間」「隙間時間」です。一度自分で取り組んだことは，次は確実に速度と正確性が上がります。それを実感することも成長の糧となるでしょう。

④　復習について　その２

③が終わったら，新たな問題にチャレンジしたくなるでしょう。「練習問題」が各講２題ずつ用意してあります。講義の問題に関連する問題もあれば，発展的な内容もあります。また問題によって難易度もさまざまです。

解き終えたら，「解答」を見て自分の到達具合をチェックしてみましょう。解答にはワンポイントのコメントもついています。この「練習問題」もまた，みなさんの成長のために厳選し

た問題です。より理解を深めていただきたく思います。

以上を確実に繰り返すことにより，確実に「自分で考える」領域に至ることができます。それはもしかしたら自分の力だけで到達したかもしれない領域です。しかしながら，もしそうであったとしても，そこに至る確実性の高いものがあるとしたら，それを選択することによって浮いた時間や労力を他の学習に回すことができるでしょう。この講義がそういう目的をかなえるための存在であること，それは繰り返しますがサイクルを確実に構築した人だけがわかることです。みなさんの日々の努力，期待しています。

〈 Memo 〉

第１講　方程式・不等式

1　どのような実数 x に対しても，不等式

$$|x^3+ax^2+bx+c| \leqq |x^3|$$

が成り立つように，実数 a，b，c を定めよ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

2　実数 x，y が $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x^3+y^3=1$ を満たしながら変わるとき，$x+y$ がとりうる値の範囲を求めよ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

3　実数 a，b，c の関係式　$a^2+b^2+c^2-10a-11=0$, $a^2-bc-4a-5=0$　について，次の問いに答えよ．

(1)　実数 a がどのような範囲の値であるとき，上の関係式を満たす実数 b，c が存在するか．その a の範囲を求めよ．

(2)　実数 a，b，c が上の関係式を満たすとき，$ab+bc+ca$ の最小値を求めよ．

【Point Pickup】

< Note >

テキスト解答

第1講　方程式・不等式

1　どのような実数xに対しても，不等式

$$|x^3+ax^2+bx+c|\leqq|x^3| \quad \cdots\cdots①$$

が成り立つように，実数a，b，cを定めよ．

①がすべての実数xで成り立つためには$x=0$で成り立つことが必要である．

よって，$|c|\leqq 0$　　ゆえに　$c=0$

このとき①は

$$|x^3+ax^2+bx|\leqq|x^3| \qquad |x||x^2+ax+b|\leqq|x||x^2|$$

$x\neq 0$のとき

$$|x^2+ax+b|\leqq|x^2|=x^2 \quad \text{つまり} \quad -x^2\leqq x^2+ax+b\leqq x^2$$

これがすべての実数$x(\neq 0)$で成り立つ条件を考えればよい．

　$-x^2\leqq x^2+ax+b$　より　$2x^2+ax+b\geqq 0$　　よって　$a^2-8b\leqq 0$　……②

　$x^2+ax+b\leqq x^2$　より　$ax+b\leqq 0$　　よって　$a=0$，$b\leqq 0$　……③

②と③が同時に成り立つのは　$a=b=0$　のとき

以上より，$a=b=c=0$であることが必要である．

逆に，$a=b=c=0$のとき，①は　$|x^3|\leqq|x^3|$　これはすべての実数xで成立し十分である．

したがって，求める条件は　$\boldsymbol{a=b=c=0}$

2　実数x，yが$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x^3+y^3=1$を満たしながら変わるとき，$x+y$がとりうる値の範囲を求めよ．

$x^3+y^3=1$より　$y^3=1-x^3$

　$y\geqq 0$より，$y^3\geqq 0$　つまり$1-x^3\geqq 0$　　$x^3\leqq 1$　ゆえに　$x\leqq 1$　つまり　$0\leqq x\leqq 1$

である．

同様に　$0\leqq y\leqq 1$

このとき，$x+y=k$とおき，kのとりうる値の範囲を求める．

　$y=k-x$　これを　$x^3+y^3=1$に代入して

　$x^3+(k-x)^3=1$

　$3kx^2-3k^2x+k^3-1=0$　……①

①が$0\leqq x\leqq 1$に少なくとも1つの実数解をもつときのkの範囲を求める．

$f(x)=3kx^2-3k^2x+k^3-1$　とおく$(k\neq 0)$　　グラフの軸は$x=\dfrac{k}{2}$

$$f(0)=k^3-1=(k-1)(k^2+k+1)=(k-1)\left\{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right\}$$

$f(1)=k^3-3k^2+3k-1=(k-1)^3$

よって，$f(0)$，$f(1)$ は正負を共にするので，①が $0\leqq x\leqq 1$ に解をもつとすれば２解とも（重解含む）$0\leqq x\leqq 1$ に存在する．

よって，$0\leqq \dfrac{k}{2}\leqq 1$　より　$0<k\leqq 2$　……②　このとき，$f(x)$ のグラフは下に凸となる．

$f(0)\geqq 0$　かつ　$f(1)\geqq 0$　より　$k\geqq 1$　……③

$f(x)=0$ の判別式 D について，$D\geqq 0$ より

$9k^4-12k(k^3-1)\geqq 0$　　$k^3-4\leqq 0$　　$k\leqq \sqrt[3]{4}$　……④

②〜④より $1\leqq k\leqq \sqrt[3]{4}$　　ゆえに　$\boldsymbol{1\leqq x+y\leqq \sqrt[3]{4}}$

3　実数 a，b，c の関係式　$a^2+b^2+c^2-10a-11=0$　…①，$a^2-bc-4a-5=0$　…②
について，次の問いに答えよ．

(1)　実数 a がどのような範囲の値であるとき，上の関係式を満たす実数 b，c が存在するか．その a の範囲を求めよ．

(2)　実数 a，b，c が上の関係式を満たすとき，$ab+bc+ca$ の最小値を求めよ．

---

(1)　②より　$bc=a^2-4a-5$　…③

①より　$b^2+c^2=-a^2+10a+11$

$(b+c)^2-2bc=-a^2+10a+11$

$(b+c)^2=2bc-a^2+10a+11=2(a^2-4a-5)-a^2+10a+11=a^2+2a+1=(a+1)^2$

$b+c=\pm(a+1)$　…④

③，④より b，c は２次方程式　$t^2\mp(a+1)t+a^2-4a-5=0$　の２解である．

実数条件より　$(a+1)^2-4(a^2-4a-5)\geqq 0$

$a^2-6a-7\leqq 0$

$(a+1)(a-7)\leqq 0$

よって，求める a の範囲は　$\boldsymbol{-1\leqq a\leqq 7}$

(2)　$ab+bc+ca=(b+c)a+bc=\pm(a+1)a+a^2-4a-5$

$$=\begin{cases}2a^2-3a-5=f_1(a)\\-5a-5=f_2(a)\end{cases}$$　とおく．

$f_1(a)=2\left(a-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{49}{8}$ より，(1)の範囲で $f_1(a)$ は $a=\dfrac{3}{4}$ のとき最小値 $-\dfrac{49}{8}$ をとる．

$f_2(a)$は単調減少である．よって，(1)の範囲で$f_2(a)$は$a=7$のとき最小値-40をとる．

以上より，$ab+bc+ca$ の最小値は　$\boldsymbol{-40}$

第１講　方程式・不等式　練習問題

1　座標平面上の点 $(x,\ y)$ が $x^2-2xy+2y^2=4$ を満たして動くとき，次の問いに答えよ．

(1)　$x+y$ の最大値を求めよ．

(2)　$\dfrac{x}{y+4}$ の最大値を求めよ．

2　k は -1 でない実数の定数とする．$x+y=k$ であるとき，$x^3+y^3-3xy+1=0$ を満たす実数 x，y が存在するような k の値と，そのときの x，y の値を求めよ．

練習問題解答

第１講　方程式・不等式　　練習問題　解答

1　座標平面上の点 $(x,\ y)$ が $x^2-2xy+2y^2=4$ を満たして動くとき，次の問いに答えよ．

(1)　$x+y$ の最大値を求めよ．

(2)　$\dfrac{x}{y+4}$ の最大値を求めよ．

解答例

(1)　$x+y=k$ とおくと，$y=k-x$

これを $x^2-2xy+2y^2=4$ に代入して

$$x^2-2x(k-x)+2(k-x)^2=4$$

$$5x^2-6kx+2k^2-4=0 \quad \cdots\cdots①$$

x は実数より，①の判別式を D_1 とすると

$D_1 \geqq 0$ より　$9k^2-5(2k^2-4) \geqq 0$

$k^2 \leqq 20$　　よって　$-2\sqrt{5} \leqq \boldsymbol{k} \leqq 2\sqrt{5}$

← ①を満たす「実数」x が存在するための k の条件を求める

よって，$x+y$ の最大値は $\boldsymbol{2\sqrt{5}}$

(2)　$\dfrac{x}{y+4}=s$ とおくと，$x=s(y+4)$

これを，$x^2-2xy+2y^2=4$ に代入して

$$s^2(y+4)^2-2ys(y+4)+2y^2=4$$

$$(s^2-2s+2)y^2+8(s^2-s)y+16s^2-4=0 \quad \cdots\cdots②$$

y は実数より，②の判別式を D_2 とすると

$D_2 \geqq 0$ より　$16(s^2-s)^2-(s^2-2s+2)(16s^2-4) \geqq 0$

$3s^2+2s-2 \leqq 0$　　$\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3} \leqq s \leqq \dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$

よって，$\dfrac{x}{y+4}$ の最大値は $\boldsymbol{\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}}$

※ [　　　] は授業で触れたポイント．定着しているか確認しよう！

2　k は -1 でない実数の定数とする．$x+y=k$ であるとき，$x^3+y^3-3xy+1=0$ を満たす実数 x，y が存在するような k の値と，そのときの x，y の値を求めよ．

解答例

$x^3+y^3+1-3xy=(x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-x-y)$ より

「準」公式
$x^3+y^3+z^3-3xyz$
$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$x^3+y^3-3xy+1=0$　から

$$(x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-x-y)=0$$

$$(x+y+1)\{(x+y)^2-(x+y)-3xy+1\}=0$$

$$(k+1)(k^2-k-3xy+1)=0$$

$k\neq-1$　であるから

$$k^2-k-3xy+1=0 \qquad \text{ゆえに}\quad xy=\frac{\boldsymbol{k^2-k+1}}{3}$$

これと $x+y=k$　より

解と係数の関係の「逆」
和と積の形が出たら反応できるように.

x，y は 2 次方程式 $t^2-\boldsymbol{k}t+\dfrac{\boldsymbol{k^2-k+1}}{3}=0$　……①の 2 解

実数条件より　$k^2-4\cdot\dfrac{k^2-k+1}{3}\geqq0$

$$k^2-4k+4\leqq0$$

ゆえに　$k=\mathbf{2}$

このとき　①は重解 $t=1$ をもつ.

よって　$(x,\ y)=(\mathbf{1},\ \mathbf{1})$